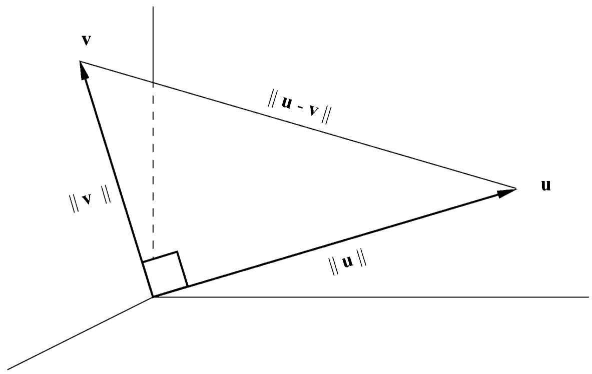
10. Ortogonalni vektori

(10.01) Ortogonalnost

U unitarnom prostoru $\mathcal{V}$, za dva vektora $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ kažemo da su <u>*ortogonalna*</u> (jedan na drugi) kadgod je $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$, i ovo označavamo sa $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

- Za $\mathbb{R}^n$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = 0$.
- Za $\mathbb{C}^n$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} = 0$. ◇

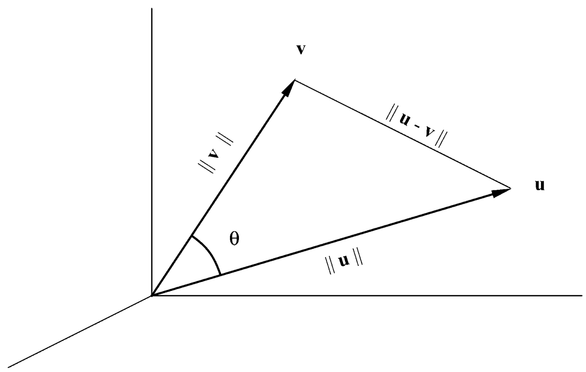


(10.02) Uglovi

U realnom unitarnom prostoru $\mathcal{V}$, ugao u radijanima između dva nenula vektora $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ je definisan kao broj $\theta \in [0, \pi]$ takav da

$$cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}.$$

◇



(10.03) Ortonormirani skupovi

Skup $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ se zove ortonormirani skup kadgod je $\|\boldsymbol{u}_i\| = 1$ za svaki i, i vrijedi $\boldsymbol{u}_i \perp \boldsymbol{u}_j$ za sve $i \neq j$. Drugim riječima,

$$\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{kad je } i = j, \\ 0 & \text{kad je } i \neq j. \end{cases}$$

- Svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan.
- Svaki ortonormiran skup od n vektora iz n-dimenzionalnog prostora $\mathcal{V}$ je ortonormirana baza za $\mathcal{V}$. ◇

(10.04) Furijer-ov razvoj

Ako je $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ ortonormirana baza za unitarni prostor $\mathcal{V}$, tada svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ se može izraziti kao

$$\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}_1 + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}_2 + ... + \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}_n.$$

Ovo se zove *Furijerov razvoj* za $\boldsymbol{x}$. Skalare $\xi_i = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{x} \rangle$ su koordinate od $\boldsymbol{x}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$, i njih zovemo *Furijeovi koeficijenti*. Geometriski, Furijerov razvoj razlaže x na n međusobno ortogonalnih vektora $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}_i$, od kojih svaki predstavlja ortogonalnu projekciju od $\boldsymbol{x}$ na prostor (liniju) generisanu sa $\boldsymbol{u}_i$. (Više o ovome je rečeno u lekciji Ortogonalne projekcije). $\diamond$

(#) Koristeći standardni unutrašnji proizvod, odrediti koji od sljedećih parova su ortogonalni vektori u naznačenim prostorima.

(a) $x=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ u $\mathbb{R}^3$,

(b) $x=\begin{pmatrix}i\\1+i\\2\\1-i\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}0\\1+i\\-2\\1-i\end{pmatrix}$ u $\mathbb{C}^4$.

Rj:

a) Za $x,y\in\mathbb{R}^3$ $\langle x,y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \in \mathbb{R}$. Pa za $x=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$

$$x^T y = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = -2-6+8=0$$

Vektori $x=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ su ortogonalni u $\mathbb{R}^3$.

b) Za $x,y\in\mathbb{C}^4$ $\langle x,y\rangle = x^* y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i \in \mathbb{C}$.

Pa za $x=\begin{pmatrix}i\\1+i\\2\\1-i\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}0\\1+i\\-2\\1-i\end{pmatrix}$ imamo

$$\langle x,y\rangle = 0+(1-i)(1+i)+2\cdot(-2)+(1+i)(1-i) =$$
$$= 1-i^2-4+1-i^2 = 0$$

$i^2=-1$

Vektori $x=\begin{pmatrix}i\\1+i\\2\\1-i\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}0\\1+i\\-2\\1-i\end{pmatrix}$ su ortogonalni u $\mathbb{C}^4$.

Koristeći standardni unutrašnji proizvod, odrediti koji od sljedećih parova su ortogonalni vektori u naznačenim prostorima

(a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ u $\mathbb{R}^4$;

(b) $x = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} 1-i \\ -3 \\ -i \end{pmatrix}$ u $\mathbb{C}^3$

c) $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ u $\mathbb{R}^n$.

R: a) $\underline{\text{Za } x, y \in \mathbb{R}^4 \quad \langle x, y \rangle = x^T y} = \underline{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i \in \mathbb{R}}$. U našem slučaju

$\langle x, y \rangle = 4 - 4 - 3 + 4 = 1$

Dati vektori nisu ortogonalni u $\mathbb{R}^4$.

b) $\underline{\text{Za } x, y \in \mathbb{C} \quad \langle x, y \rangle = x^* y} = \underline{\sum_{i=1}^{3} \overline{x_i} y_i \in \mathbb{C}}$ ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

Dati vektori nisu ortogonalno u $\mathbb{C}^3$.

c) Za $x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$

U našem slučaju $\langle x, y \rangle = 0 + 0 + \ldots + 0$.

Dati vektori su ortogonalni u $\mathbb{R}^n$.

(#) Pronaći dva jedinična vektora koja su ortogonalna na $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Rj. Odredimo vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ takav da $\langle u, v \rangle = 0$ tj.

$$3x - 2y = 0.$$

Jedna jednačina sa dvije nepoznate ima ∞ mnogo rješenja npr. $y = 3 \Rightarrow x = 2$.

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$$

Time smo pronašli jedan ortogonalan vektor na u.

Ortonormirajmo vektor v. $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

Jedinični vektor v_1 koji je ortogonalan na u je

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

Drugi vektor koji je ortogonalan na u mora biti negativna verzija od v_1.

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo sljedeći skup od tri vektora

$$\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Koristeći standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^4$ provjeriti da li su ovi vektori međusobno ortogonalni.

(b) Pronaći nenula vektor x_4 tako da je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ skup međusobno ortogonalnih vektora.

(c) Pretvoriti dobijeni skup u ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^4$.

R: (a) Dva vektora u i v su međusobno ortogonalna akko $\langle u,v \rangle = 0$, što označavamo sa $u \perp v$.

za $\mathbb{R}^4$ $\langle u,v \rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{4} u_i v_i$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 1 - 1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$$

$$\langle x_1, x_3 \rangle = -1 + 1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_3$$

$$\langle x_2, x_3 \rangle = -1 - 1 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 \perp x_3$$

Dati vektori su međusobno ortogonalni.

(b) Trebamo pronaći vektor $x_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ t.d. $x_1 \perp x_4$, $x_2 \perp x_4$, $x_3 \perp x_4$ tj. $x_1^T x_4 = 0$, $x_2^T x_4 = 0$ i $x_3^T x_4 = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + \quad 2\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad &= 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} II_v - I_v \\ \sim \\ III_v + I_v \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

rang $\bar{A} = 3 =$ rang $A < 4 =$ br. nepoznatih

sistem ima ∞ mnogo rješenja, jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

$\alpha_3 = 0$

$2\alpha_2 - 2\alpha_4 = 0 \implies \alpha_2 = \alpha_4 = t$

$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0$

$\alpha_1 = -t$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\|x_1\| = \sqrt{1+1+0+4} = \sqrt{6}$, $\quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|x_2\| = \sqrt{1+1+1+0} = \sqrt{3}$, $\quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|x_3\| = \sqrt{1+1+4+0} = \sqrt{6}$, $\quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|x_4\| = \sqrt{1+1+0+1} = \sqrt{3}$, $\quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ortonormirana baza za $\mathbb{R}^4$ je $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

(#) Koristeći standardni unutrašnji proizvod, odrediti Furijeovo razlaganje vektora x u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ gdje je

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \quad i \quad \mathcal{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj. Furijer-ovo razlaganje

Ako je $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ ortonormirana baza u unitarnom prostoru V, tada se svaki $x\in V$ može izraziti kao

$$x=\langle u_1,x\rangle u_1+\langle u_2,x\rangle u_2+\dots+\langle u_n,x\rangle u_n.$$

Ovo razlaganje zovemo Furijer-ovo razlaganje od x. Skalare $\xi_i=\langle u_i,x\rangle$ su koordinate od x u odnosu na bazu $\mathcal{B}$, i njih zovemo Furijer-ovi koeficijenti.

Primjetimo da je data baza $\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ortonormirana baza.

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad u_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Furijer-ovi koeficijenti su $\langle u_1,x\rangle=u_1^Tx=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0+0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle u_2,x\rangle=u_2^Tx=\frac{1}{\sqrt{3}}(1+0-2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\langle u_3,x\rangle=u_3^Tx=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1+0-4)=-\frac{5}{\sqrt{6}}$

Prema tome

$$x=\langle u_1,x\rangle u_1+\langle u_2,x\rangle u_2+\langle u_3,x\rangle u_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{5}{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

(#) U odnosu na unutrašnji proizvod matrica dat sa $\langle A,B\rangle = trag(A^T B)$ provjeriti da li je skup
$$\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$$
ortonormirana baza za $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$, pa onda izračunati Furijer-ov razvoj od $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

Rj: Furijerov razvoj

Ako je $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ ortonormirana baza za unitarni prostor V, tada se svaki $x\in V$ može izraziti kao
$$x=\langle u_1,x\rangle u_1+\langle u_2,x\rangle u_2+\dots+\langle u_n,x\rangle u_n.$$
Ovo zovemo Furijer-ov razvoj od x. Skalare $\xi_i=\langle u_i,x\rangle$ su koordinate od x u odnosu na $\mathcal{B}$, i te koeficijente zovemo Furijer-ovi koeficijenti.

$$U_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad U_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad U_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\quad U_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$\langle U_1,U_2\rangle=trag(U_1^TU_2)=trag\left(\begin{bmatrix}0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0\\0&-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\right)=0+0=0$$

$$\langle U_1,U_3\rangle=trag(U_1^TU_3)=trag\left(\begin{bmatrix}0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&-1/2\\1/2&1/2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$$

$$\langle U_1,U_4\rangle=trag(U_1^TU_4)=trag\left(\begin{bmatrix}0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&1/2\\-1/2&1/2\end{bmatrix}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$$

$$\langle U_2,U_3\rangle=trag(U_2^TU_3)=trag\left(\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0\\0&-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&-1/2\\1/2&1/2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$$

$< U_2, U_4 > =$ ZA VJEŽBU $= 0$
...

$< U_3, U_4 > = \ldots$ ZA VJEŽBU $= 0$

Ovim smo pokazali da je $\mathcal{B}$ ortogonalan skup.
Provjerimo da li je ortonormiran.

$$\|U_1\|^2 = < U_1, U_1 > = trag(U_1^T U_1) = trag\left(\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\|U_2\|^2 = < U_2, U_2 > = trag(U_2^T U_2) = trag\left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\|U_3\|^2 = \ldots = 1 \qquad \|U_4\|^2 = \ldots = 1$$

Prema tome $\mathcal{B}$ je ortonormiran skup. Znamo da

Svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan

Ranije smo pokazali da $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ima dimenziju 4, pa je $\mathcal{B}$ ortonormirana baza za $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
Furijeov razvoj je oblika

$$A = < U_1, A > U_1 + < U_2, A > U_2 + < U_3, A > U_3 + < U_4, A > U_4$$

$$\xi_1 = < U_1, A > trag(U_1^T A) = trag\left(\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\xi_2 = < U_2, A > = trag(U_2^T A) = trag\left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

... ZA VJEŽBU ... $\xi_3 = < U_3, A > = 1, \quad \xi_4 = < U_4, A > = 1$

Prema tome Furijeov razvoj od A je

$$A = \frac{2}{\sqrt{2}} U_1 + U_3 + U_4 .$$

(#) Odrediti ugao između $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rj.

Ugao

U realnom unitarnom prostoru $\mathcal{V}$, ugao između dva nenula vektora $x, y \in \mathcal{V}$ (u radijanima) je definisan kao broj $\theta \in [0, \pi]$ takav da

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

$$\langle x, y \rangle = x^T y = (2 \ \ -1 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle} = \sqrt{y^T y} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

(#) Neka je data ortonormirana baza $\mathcal{B}$ za prostor V. Objasniti zašto je Furijer-ov razvoj za $x \in V$ jedinstveno određen sa $\mathcal{B}$.

Rj:
U nekoj od prethodnih lekcija smo pokazali da se svaki vektor $v \in V$ može izraziti kao linearna kombinacija vektora iz baze $\mathcal{B}$ na tačno jedan način.

Kako je $\mathcal{B}$ baza za V (ortonormirana) to za $\forall x \in V$ $\exists$ jedinstveni koeficijenti takvi da

$x =$ linearna kombinacija vektora iz baze $\mathcal{B}$.

(npr. $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ $\exists! \xi_i \in \mathbb{R}$

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n \;)$$

Ovaj razvoj je u stvari Furijer-ov razvoj za $x \in V$.

Objasniti zašto su kolone matrice $U_{n\times n}$ ortonormirana baza za $\mathbb{C}^n$ ako i samo ako $U^* = U^{-1}$ (Ovakve matrice zovemo unitarne matrice).

Rj.

„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da su kolone matrice U

$$U = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

ortonormirana baza z $\mathbb{C}^n$. Tada ij-element matrice U^*U je

$$[U^*U]_{ij} = u_i^* u_j = \begin{cases} 1, & \text{kada } i=j \\ 0, & \text{kada } i \neq j \end{cases}$$

zato što
$$U^* = \begin{bmatrix} — & u_1^* & — \\ — & u_2^* & — \\ & \vdots & \\ — & u_n^* & — \end{bmatrix}.$$

Prema tome $U^*U = I \Rightarrow U^* = U^{-1}$.

„$\Leftarrow$" Obrnuto, pretpostavimo da je $U^* = U^{-1}$.

Tada je $U^*U = I$ tj.
$$\begin{bmatrix} — & u_1^* & — \\ — & u_2^* & — \\ & \vdots & \\ — & u_n^* & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = I$$

iz čega vidimo da su kolone od $\mathbb{C}^n$ ortonormirane. Ove kolone formiraju bazu zato što su ortonormirani skupovi uvijek linearno nezavisni.

\# Koristeći trag kao unutrašnji proizvod opisan ranije ($\langle A, B \rangle = \text{trag}(A^T B)$) odrediti ugao između sljedećih parova matrica

(a) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Rj: Ugao

U realnom unitarnom prostoru V, ugao u radijanima između vektora $x, y \in V$ je definisan kao broj $\theta \in [0, \pi]$ takav da

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

a) $\langle I, B \rangle = \text{trag}(I^T B) = \text{trag}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\|I\|^2 = \langle I, I \rangle = \text{trag}(I^T I) = \text{trag}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\|B\|^2 = \langle B, B \rangle = \text{trag}(B^T B) = \text{trag}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4$.

$\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2} \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\langle A, B \rangle = \text{trag}(A^T B) = \text{trag}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 6 - 6 = 0$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$.

(#) Pokazati da je svaki ortonormirani skup linearno nezavisan.

Rj. Neka je $\mathcal{B}=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ proizvoljan ortonormiran skup. Posmatrajmo jednačinu

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n=0$$

u kojoj su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nepoznate. Sad primjenimo osobinu unutrašnjeg proizvoda i primjetimo:

$$0=\langle u_i, 0\rangle=\langle u_i, \alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n\rangle=$$
$$=\alpha_1\langle u_i, u_1\rangle+\dots+\alpha_i\langle u_i, u_i\rangle+\dots+\alpha_n\langle u_i, u_n\rangle$$
$$=\alpha_i \|u_i\|^2=\alpha_i \quad \text{za } \forall i.$$

Prema tome jedino rješenje jednačine

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n=0$$

je trivijalno rješenje. Skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan.

q.e.d.

(#) Furijer-ov red

Neka je V unitarni prostor realno-vrijednosnih f-ja koje su integrabilne na intervalu $(-\pi, \pi)$ i u kojem su unutrašnji proizvod i norma dati sa

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx \quad i \quad \|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Izvesti formulu

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

za Furijer-ov red, gdje su

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad i \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Rj. Posmatrajmo skup trigonometrijskih f-ja

$$\mathcal{B}' = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}.$$

Nije teško pokazati da je $\mathcal{B}'$ ortogonalan skup. Ako normiramo svaki vektor u skupu dobićemo ortonormiran skup

$$\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}$$

Za proizvoljnu f-ju $f \in V$ konstruišimo Furijer-ov razvoj

$$F(x) = \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad \dots (*)$$

gdje su Furijer-ovi koeficijenti dati su

$$\alpha_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$\alpha_k = \left\langle \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad \text{za } \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\beta_k = \left\langle \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx, \quad \text{za } \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

Ako ove koeficijente uvstimo u (*) dobićemo Furijer-ov red

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

gdje je $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$; $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$.

Napomena: Za razliku od konačno-dimenzionalnih prostora, $F(x)$ se ne mora slagati sa orginalnom f-jom $f(x)$. Npr., F je periodična, pa nema nikakve nade da se slaže sa f ako f nije periodična.

(#) Ako je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ortonormirana baza za unitarni prostor V, objasniti zašto

$$<x, y> = \sum_i <x, u_i><u_i, y>$$

vrijedi za svaki $x, y \in V$.

Rj:

Furijer-ov razvoj

Ako je $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ortonormirana baza za unitarni prostor V, tada se svaki $x \in V$ može izraziti kao

$$x = <u_1, x> u_1 + <u_2, x> u_2 + \ldots + <u_n, x> u_n.$$

Prvo razvijmo y kao sumu

$$y = <u_1, y> u_1 + <u_2, y> u_2 + \ldots + <u_n, y> u_n$$

$$<x, y> = <x, \sum_{i=1}^{n} <u_i, y> u_i> = \sum_{i=1}^{n} <x, <u_i, y> u_i> =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} <u_i, y><x, u_i> = \sum_{i=1}^{n} <x, u_i><u_i, y>$$

(#) Posmatrajmo realni unitarni prostor u kojem je $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

(a) Dokazati da, ako je $\|x\| = \|y\|$, tada $(x+y) \perp (x-y)$.

(b) Za standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^2$, skicirati sliku ovog. Tj. skicirati lokaciju od $x+y$ i $x-y$ za dva vektora sa jednakim normama.

Rj.

a) U realnom unitarnom prostoru $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

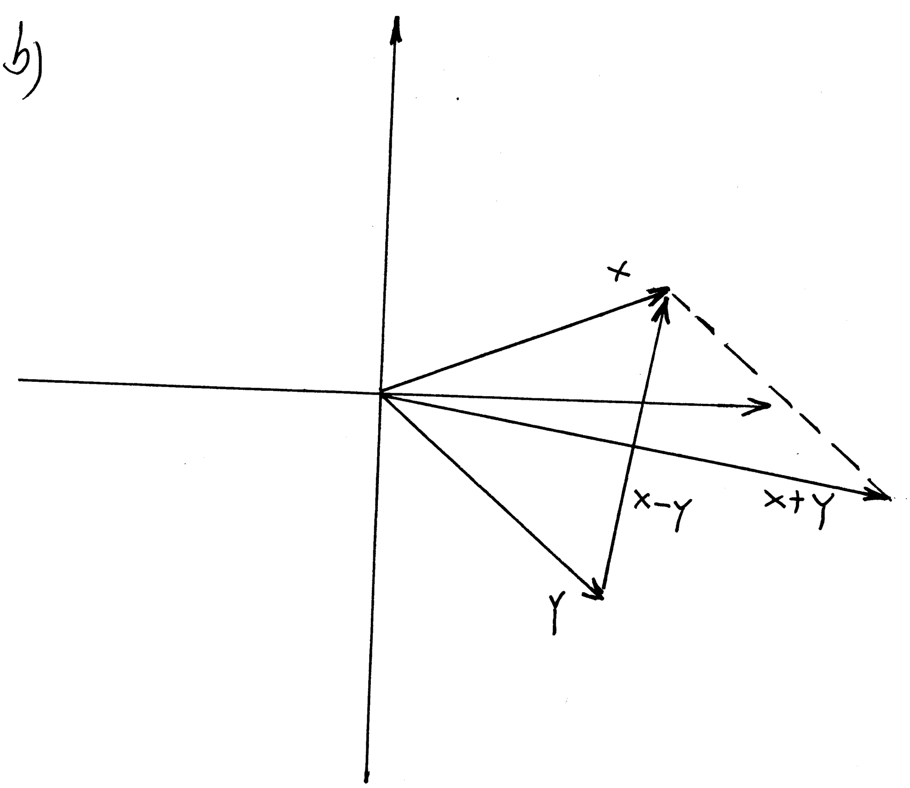
Kako je $\|x\| = \|y\|$ imamo

$$\langle x+y, x-y \rangle = \langle x+y, x \rangle - \langle x+y, y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle$$

$$= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle - \|y\|^2 = 0$$

b)



Zadaci za vježbu

1. Provjeriti ortogonalnost sljedećih vektora

a) x i y, ako su $x=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\-4\end{pmatrix}$

b) u i v, ako su $u=\begin{pmatrix}i\\3\\1\end{pmatrix}$ i $v=\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}$.

(izračunati obe vrijednosti i u^*v i u^Tv)

2. Odrediti ugao između vektora $x=\begin{pmatrix}-4\\2\\1\\2\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\2\end{pmatrix}$.

3. Provjeriti da li je skup $\mathcal{B}'=\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ortogonalan skup. Uz pomoć $\mathcal{B}'$ formirati ortonormiran skup $\mathcal{B}$.

4. Odrediti Furijer-ov razvoj vektora $x=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ u odnosu na standardni unutrašnji proizvod i ortonormiranu bazu $\mathcal{B}=\left\{u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

5. Pitagorina teorema

Neka je $\mathcal{V}$ opšti unitarni prostor u kojem je $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$.

(a) Kada je $\mathcal{V}$ realni prostor, dokazati da $x\perp y$ ako i samo ako $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ (nešto ne bi bilo u redu ako ovo ne bi bilo tačno, zato što je definicija ortogonalnosti odavde i potekla).

(b) Konstruisati primjer koji će pokazati da implikacija u dijelu (a) ne vrijedi kada je $\mathcal{V}$ kompleksan prostor.

(c) Kada je $\mathcal{V}$ kompleksan prostor, dokazati da $x\perp y$ ako i samo ako $\|\alpha x+\beta y\|^2=\|\alpha x\|^2+\|\beta y\|^2$ za $\forall\alpha$ i β.